УДК 656:658

Волошенко В.В., студентка гр. ТТмм–14–1
Научный руководитель: Трубицин М.Н., к.т.н., доцент кафедры управления на транспорте
(*Государственное ВУЗ «Национальный горный университет», г. Днипро, Украина*)

УЛУЧШЕНИЕ ПЕРВЫХ ОПОРНЫХ ПЛАНОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

При изучении практических и теоретических задач управления на автомобильном транспорте большое распространение имеют задачи линейного программирования (ЗЛП) и их разновидность – транспортные задачи (ТЗ). В основе их точного решения лежит симплекс метод, а для получения приближенного решения используются различные методы, дающие на каждой итерации улучшенное решение. Оба вида методов отталкиваются от некоторого начального решения: точные – от первоначального опорного плана (ПОП); приближенные – от приближенного нулевого значения. При достаточно хорошем выборе начального приближения оно может совпасть с искомым решением, или находится довольно близко к нему. В любом случае, приближение начального решения к искомому является важной и **актуальной задачей** в виду распространенности, многокритериальности ТЗ, их большой размерности и обязательным качественным требованием – получения единственно возможного глобального решения ЗЛП.

Цель работы: найти рациональный вид начального решения ТЗ и направления его дальнейшего улучшения. При этом **идея работы** состоит в оценке совместных характеристик и положений найденного экстремума и известных начальных решений.

Состояние вопроса: Большая размерность ТЗ ($\boldsymbol{m{\cdot}n}$ – размерность матрицы тарифов $\boldsymbol{C}$, табл.1) искусственно снижается до $\boldsymbol{m+n-1}$ при использовании точных методов, недостатком чего является обязательная необходимость рассмотрения переменных пространств (изменяемые наименования осей – одна за каждую итерацию). Известными условиями проверки правильности найденного решения является однозначность потенциалов или оценки свободных клеток (точные методы потенциалов и распределительный). В приближенных оптимизационных методах такой качественной оценки нет.

Материалы исследования. Использовав известную программу OPTIMAL-2 составим возможные: 4 варианта ПОП, табл. 1, для получения точного решения ТЗ, табл.2; и 2 варианта приближенных начальных решений для апробации линейных и нелинейных алгоритмов пакета MathCad, табл. 3. Расчеты показали, что ПОП, построенный по методу Фогеля, имеет самые лучшие параметры-характеристики по:
- разнице начального и конечного значений целевой функции, табл. 1,3;
- количеству полностью совпадающих клеток первого и окончательного ОП, табл. 1,2;
- $\boldsymbol{m{\cdot}n}$- мерному расстоянию между начальной и конечной точками-решениями, табл. 4;
- количеству проведенных итераций в точных методах решения, табл. 4.

Результаты использования приближенных методов решения для ПОП, как начальных приближений показаны в табл. 3. Их не всегда можно считать верными, т.к. количество не нулевых точек не совпадает с $\boldsymbol{m+n-1=14}$. Исключение для всех вариантов составляет <u>линейный алгоритм</u>, по которому решение оптимизационной <u>линейной задачи</u> получается требуемым, глобальным, с учетом клеток нулевого заполнения, табл. 2.

Результаты исследования. Для ускоренного и надежного нахождения глобального экстремума ЗЛП предлагается следующий алгоритм:
1. построение ПОП по методу Фогеля – начальное решение;
2. определение линейным алгоритмом приближенного решения;
3. доводка занятых клеток до числа $\boldsymbol{m+n-1}$ – введением произвольных клеток с нулевым заполнением или переводом нужных объемов по построенным контурам;

Таблица 1.

Точные методы, исходные данные и первые опорные планы (ПОП)

Исходные данные ТЗ (матрица тарифов $\boldsymbol{C}$, вектора объемов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$)

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	b
1	71,4	29,5	10,0	18,0	10,2	4,6	46,5	35,1	30,1	8,9	**200**
2	71,9	31,1	12,4	19,5	11,6	6,4	48,5	38,3	32,4	10,4	**600**
3	72,0	31,5	13,0	19,8	11,9	6,8	48,9	39,0	32,9	10,7	**1000**
4	71,7	30,7	11,8	19,1	11,2	5,9	47,9	37,4	31,8	9,97	**700**
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**200**
a	**600**	**300**	**100**	**200**	**200**	**300**	**400**	**300**	**200**	**100**	**2700**

ПОП, метод Северо-Западного угла

(жёлтая клетка) - частично совпавшая клетка

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	**200**									
2	**400**	**200**								
3		**100**	**100**	**200**	**200**	**300**	**100**			
4							**300**	**300**	**100**	
5									**100**	**100**

m+n-1=5+10-1=14 заполненных клеток

ПОП совпали для методов ***min*** элемента и двойного предпочтения

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	**0**					**100**				**100**
2	**0**	**100**						**300**	**200**	
3	**600**						**400**			
4		**200**	**100**	**200**	**200**					
5						**200**				

0 - доп. заполненные «0» клетки до ***m+n-1=14***

ПОП, метод Фогеля

(зелёная клетка) - полностью совпавшая клетка

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	**200**									
2				**200**	**100**	**100**	**100**			**100**
3		**300**	**100**		**100**			**300**	**200**	
4	**400**						**300**			
5						**200**				

m+n-1=5+10-1=14 заполненных клеток

Приближенные методы, усредненные начальные планы

$$\bar{x}_{i,j}=\frac{1}{2}\left(\frac{a_j}{m}+\frac{b_i}{n}\right)$$

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	**70**	**40**	**20**	**30**	**30**	**40**	**50**	**40**	**30**	**20**
2	**90**	**60**	**40**	**50**	**50**	**60**	**70**	**60**	**50**	**40**
3	**110**	**80**	**60**	**70**	**70**	**80**	**90**	**80**	**70**	**60**
4	**95**	**65**	**45**	**55**	**55**	**65**	**75**	**65**	**55**	**45**
5	**70**	**40**	**20**	**30**	**30**	**40**	**50**	**40**	**30**	**20**

$\Sigma_i\Sigma_j x_{ij}=A$

$$\hat{x}_{i,j}=\frac{a_j b_i}{A},\ \text{где}\ A=\sum_{i=1}^{m} b_i=\sum_{j=1}^{n} a_j$$

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	**44**	**22**	**7**	**15**	**15**	**22**	**30**	**22**	**15**	**7**
2	**133**	**67**	**22**	**44**	**44**	**67**	**89**	**67**	**44**	**22**
3	**222**	**111**	**37**	**74**	**74**	**111**	**148**	**111**	**74**	**37**
4	**156**	**78**	**26**	**52**	**52**	**78**	**104**	**78**	**52**	**26**
5	**44**	**22**	**7**	**15**	**15**	**22**	**30**	**22**	**15**	**7**

заполнены все ***m•n=5•10=50*** клеток, в $\hat{x}$ десятичные знаки – отброшены

Значения целевой функции $z(x)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}C_{i,j}\cdot x_{i,j}$, соответствующие начальным планам

-	$\boldsymbol{Z_{СевЗап}=95766{,}496}$
$\boldsymbol{Z_{МинЭл}=Z_{ДвПр}=98576{,}610}$	$\boldsymbol{Z_{Фог}=99164{,}296}$
$\boldsymbol{z(\bar{x})=74786{,}558}$	$\boldsymbol{z(\hat{x})=92541{,}902}$

Были определены при выполнении: $\sum_{i=1}^{m}x_{i,j}=b_j;\quad \sum_{j=1}^{n}x_{i,j}=a_i;\quad x_{i,j}\ge 0;\quad i=\overline{1,m};\quad j=\overline{1,n}$

Таблица 2.

Решение ТЗ, достигнутое точными методами (распределения и потенциалов)

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	***200***	***0***	***0***	***0***	***0***	***0***	***0***	***0***	***0***	***0***
2	***0***	***300***	***0***	***200***	***0***	***100***	***0***	***0***	***0***	***0***
3	***0***	***0***	***100***	***0***	***0***	***0***	***400***	***300***	***200***	***0***
4	***400***	***0***	***0***	***0***	***200***	***0***	***0***	***0***	***0***	***100***
5	***0***	***0***	***0***	***0***	***0***	***200***	***0***	***0***	***0***	***0***

Клетки ***0*** являются клетками плана-решения с нулевым заполнением

4. Проверка глобальности решения методом потенциалов или оценками свободных клеток распределительным методом.

Таблица 3.

Результаты использования приближенных методов решения (MathCad, точность 10^{-3})

<table>
<tr><td rowspan="3">Начальные приближения (погрешность, %)</td><td rowspan="2">линейный</td><td colspan="2">нелинейные</td></tr>
<tr><td>Сопряженный градиент</td><td>Квази-Ньютон</td></tr>
<tr><td colspan="3">(количество заполненных клеток)/(значение целевой функции)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\bar{x}_{i,j}$ (24,6%)</td><td rowspan="5">12</td><td>18</td><td>13+ 1($4\cdot10^{-4}$)</td></tr>
<tr><td>99233,257</td><td>99224,528</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\hat{x}_{i,j}$ (6,8%)</td><td colspan="2">15</td></tr>
<tr><td colspan="2">99245,047</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$x_{СевЗап}$</td><td colspan="2">19</td></tr>
<tr><td rowspan="5">99246,960</td><td colspan="2">98788,358</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$x_{МинЭл} = x_{ДвПр}$</td><td colspan="2">12</td></tr>
<tr><td colspan="2">98576,219</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$x_{Фог}$</td><td colspan="2">16</td></tr>
<tr><td colspan="2">99222,99</td></tr>
<tr><td colspan="2">При действительном экстремуме:</td><td colspan="2">(7-14) / 99246,960</td></tr>
</table>

Таблица 4.

Сравнительные характеристики начальных и конечного решений ТЗ

ПОП построен по методу	Кол-во итераций	Погрешность $z(x_{план})/z(x_{реш})$, %	$m•n$-мерное расстояние	Совпадающие клетки
Северо-Западного угла	14	3,5	$1{,}08•10^6$	2•1+2•½
Минимального элемента	14	0,7	1,06•106	3•1+1•½
Двойного предпочтения	13		$1{,}04•10^6$	3•1+1•½
Фогеля	7	0,1	$5{,}22•10^5$	8•1+0•½

Количественные преимущества метода Фогеля решаемой задачи выделены в табл. 3,4 серыми подложками. В $m·n=N$-мерном пространстве план-решение представлен вершиной многогранника, которая является результатом пересечения N гиперплоскостей, рис.1.

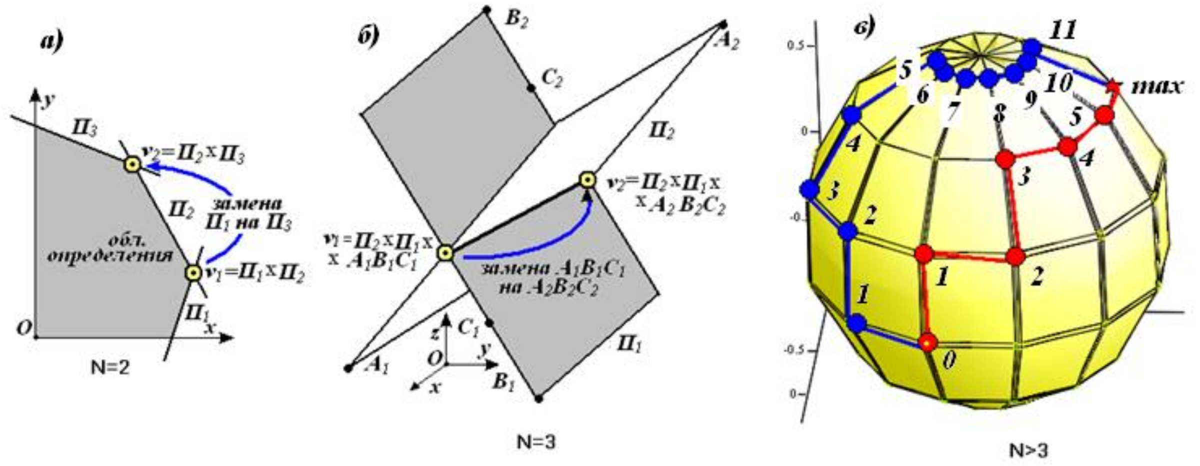

*Рис. 1. Улучшение план-решения, как замена вершины **N=2,3…**-мерного многогранника.*

Предполагаем, что дальнейшее усовершенствование методов решения ЗЛП должно коснуться вращения N-мерного пространства до совмещения направлений градиента гиперплоскости целевой функции и одной оси пространства.

Выводы по работе

- **Новизна работы** заключается в одновременном использовании положений точных и приближенных методов решения ЗЛП, что дает гарантию глобальности экстремума
- Проведенный анализ получаемых погрешностей позволяет ,для решаемого класса задач, ограничиться ПОП Фогеля, как решением ЗЛП